ΑΣΚΗΣΗ

Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=x^2+y^2$ και $(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x(t_0),y(t_0),f(x(t_0),y(t_0)))$, τα εφαπτόμενα διανύσματα των $(x(t),y(t))\subset\mathbb{R}^2$ και $(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\subset\mathbb{R}^3$ καθώς νδο η εφαπτόμενη ευθεία της $\gamma(t)$ βρίσκεται στο εφαπτ. επίπεδο

ΛΥΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Εφαπτόμενο επίπεδο:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}(x-x_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}(y-y_0)$$

$$x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2 + 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = x_0^2+y_0^2 + 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0)$$

Η καμπύλη

$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \in \Gamma_f \quad \forall t \in \mathbb{R}$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t), \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right) \stackrel{\text{καν. αλυσ.}}{=}$$

$$= (x'(t), y'(t), \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))) =$$

$$= (x'(t), y'(t), \underline{2(x(t), y(t))} \cdot (x'(t), y'(t)))$$

$$\boxed{\begin{aligned} &2(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= 2(-\cos t \sin t + \sin t \cdot \cos t) = 0 \end{aligned}}$$

δηλ.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

Εφαπτόμενη ευθεία

Η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ με $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$ της καμπύλης γ θα είναι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} - \lambda y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda x_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 3η:
Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό στο $x \in U$ στην κατεύθυνση $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, όταν f διαφορίσιμη στο x είναι $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$
Από την άλλη $\nabla f(x) \cdot v \leq |\nabla f(x) \cdot v| \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(x)\|$
Άρα: αφού $\nabla f(x) \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \|\nabla f(x)\|$, $\nabla f(x) \neq 0$
Στο σημείο $x \in U$ η κλίση $\nabla f(x) \neq 0$ δείχνει την κατεύθυνση κατά την οποία η f παρουσιάζει τη μεγαλύτερη (θετική) μεταβολή, με ρυθμό μεταβολής ("κλίση").

Παρατήρηση 4η:
Η κλίση $\nabla f(x)$ μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό στο $x \in U$ είναι κάθετη στο σύνολο $\mathcal{L}_f(c) = \{x \in U : f(x) = c\}$ ← (σύνολο στάθμης)

Συμπέρασμα: Για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \mathcal{L}_f(c)$ και $\gamma(0) = x$, ισχύει ότι:
$\gamma'(0) \cdot \nabla f(x) = 0$

Πχ
Πράγματι, για την $f \circ \bar{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ με $(f \circ \bar{\gamma})(h) = c$ $\forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ έχει παράγωγο $D(f \circ \bar{\gamma})(0) = (f \circ \bar{\gamma})'(0)$.
Από την άλλη, από κανόνα της αλυσίδας έχουμε
$D(f \circ \bar{\gamma})(0) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{\gamma}'(0)$

Παράδειγμα (πιο συγκεκριμένο)
Οι καμπύλες στάθμης του ελλειπτικού παραβολοειδούς $f(x,y) = x^2 + y^2$ είναι κύκλοι κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{c}$ του $\mathbb{R}^2$ όπου $c > 0$
$\mathcal{L}_f(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$.
Οι διαφορίσιμες καμπύλες όπου περνάνε από ένα συγκεκριμένο σημείο $(x,y) \in \mathcal{L}_f(c)$ και βρίσκονται εξολοκλήρου στο $\mathcal{L}_f(c)$ είναι της μορφής:
$\bar{\gamma}(h) = (\cos(\varphi(h)), \sin(\varphi(h)))$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
με $\bar{\gamma}(0) = (\cos(\varphi(0)), \sin(\varphi(0))) = (x, y)$

(70)

και έχουν παράγωγο

$$D\bar{\gamma}(0) = (-\sin(\varphi(0))\cdot\varphi'(0), \cos(\varphi(0))\cdot\varphi'(0)) =$$
$$= (-y, x)\cdot\varphi'(0)$$

Συνεπώς,

$$D\cdot\bar{\gamma}(0)\cdot \operatorname{grad} f(\bar{x}) = D\bar{\gamma}(0)\cdot\nabla f(\bar{x}) = (-x,y)(x,y)\,\varphi'(0) =$$
$$= 0$$

(SOS) ΑΣΚΗΣΗ (Σπίτι)

Έστω το σύνολο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = y\}\setminus\{(0,0)\} = M$

και η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y)\in M \\ 0, & (x,y)\notin M \end{cases}$$

ΝΔΟ

α) Η f μερ. διαφορ $\Leftrightarrow (x,y)\notin M$

β) Η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ υπάρχει $\forall v\in\mathbb{R}^2$ και $\|v\|=1$

(κατευθ. παράγωγος)

γ) $\exists\, \bar{v}\in\mathbb{R}^2$ με $\|v\|=1$: $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot v$